

$$1') \vec{AB} \begin{vmatrix} 2 - (-3) = 2+3=5 \\ 9-3 = 6 \end{vmatrix} \quad \vec{CO} \begin{vmatrix} 6 - (-3) = 6+3=9 \\ 4 - (-4) = 4+4=8 \end{vmatrix} \quad \text{G.P.O. 5/8}$$

2') $(AB) \parallel (CO)$ car $\vec{AB}$ et $\vec{CO}$ sont colinéaires,
ie si $\det(\vec{AB}; \vec{CO}) = 0$

$$\det(\vec{AB}; \vec{CO}) = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 54 = -14$$

$\parallel \det(\vec{AB}; \vec{CO}) \neq 0$, donc $(AB) \nparallel (CO)$

Ex 09.4 (faire une figure au brouillon)

1') Dans le triangle ABC, H est le milieu de [BC] et K celui de [BA].
Or la droite qui passe par les milieux de deux côtés
d'un triangle est parallèle au troisième côté.
 $\parallel$ Donc $(HK) \parallel (AC)$.

Dans la même configuration, le segment qui joint les milieux
de deux côtés d'un triangle mesure la moitié de la longueur
du troisième côté.

$\parallel$ Donc $HK = \frac{1}{2} AC$

$$2') \begin{cases} x_H = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ y_H = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

donc $H(3, 2)$

$$\begin{cases} x_K = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \\ y_K = \frac{4+6}{2} = 5 \end{cases}$$

donc $K(\frac{3}{2}, 5)$

Ainsi, $\vec{HK} \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{3}{2} \\ 5 - 2 = 3 \end{vmatrix} \quad (\text{à faire sous forme fractionnaire!})$

De même, $\vec{CA} \begin{vmatrix} -2 - 5 = -7 \\ -2 - 4 = -6 \end{vmatrix}$

Donc on a bien $\vec{HK} = \frac{1}{2} \vec{CA}$

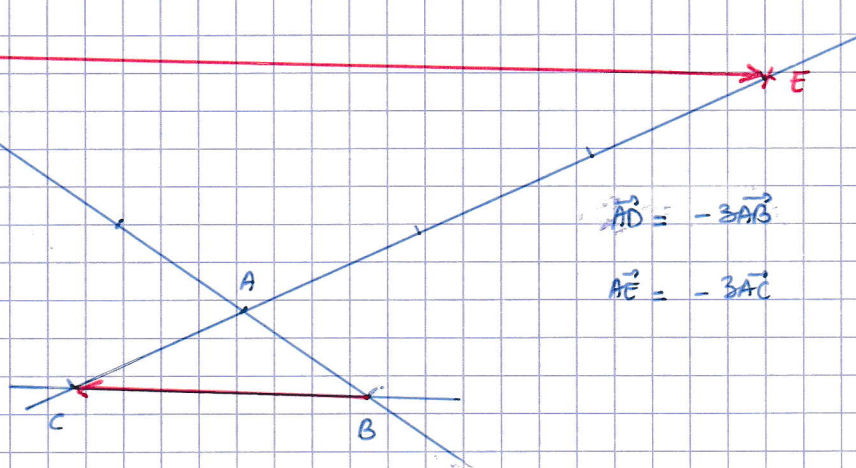
- ces vecteurs sont colinéaires, donc $(HK) \parallel (CA)$
- en ce qui concerne les normes de ces vecteurs, on a

$$\|\vec{HK}\| = \frac{1}{2} \|\vec{CA}\|$$

c'est-à-dire $HK = \frac{1}{2} CA$

Q.09.I

Les élèves qui maîtrisent la homothétie peuvent aussi faire cet exercice en adoptant ce point de vue.



$$\vec{AD} = -3\vec{AB}$$

$$\vec{AE} = -3\vec{AC}$$

1.a) D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\vec{DE} &= \vec{DA} + \vec{AE} \\ &= -\vec{AD} + \vec{AE} \\ &= -(-3\vec{AB}) + (-3\vec{AC})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{DE} &= 3\vec{AB} - 3\vec{AC} \\ \vec{DE} &= 3\vec{AB} - 3\vec{AC} \\ &= 3\vec{AB} + 3\vec{CA} \\ &= 3(\vec{AB} + \vec{CA}) \\ &= 3(\vec{CA} + \vec{AB}) \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= 3\vec{CB}\end{aligned}$$

$$\parallel \vec{DE} = -3\vec{BC}$$

1.b) Il s'agit du théorème de Thalès ! (ou plus précisément ici de sa reciproque).

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = 3$$

2.) Dans cette question, on se propose de démontrer vectoriellement la reciproque du théorème de Thalès.

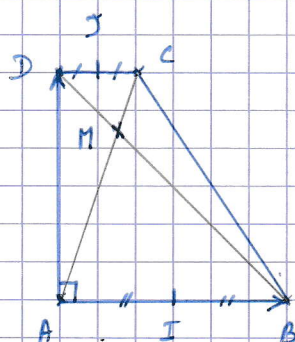
$$\text{On a : } \vec{AD} = k\vec{AB} \quad \text{et} \quad \vec{AE} = k\vec{AC}.$$

$$\begin{aligned}\vec{DE} &= \vec{DA} + \vec{AE} \\ &= -\vec{AD} + \vec{AE} \\ &= -k\vec{AB} + k\vec{AC} = k(-\vec{AB} + \vec{AC}) = k(\vec{BA} + \vec{AC})\end{aligned}$$

$$\vec{DE} = k\vec{BC} \quad \left[\begin{array}{l} \text{réciproque} \\ \text{théorème de Thalès} \end{array} \right] : \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = k$$

Ex 09.5

(Je conseille de faire la figure au brouillon au préalable afin de déterminer le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ dans un sens "confortable").



$$\begin{aligned} 1^a) \quad M \in (AC) \\ \Leftrightarrow \vec{AM} \text{ et } \vec{AC} \text{ colinéaires} \\ \Leftrightarrow \det(\vec{AM}; \vec{AC}) = 0. \end{aligned}$$

Or dans le repère $R(A, \vec{AB}, \vec{AD})$,
 $A(0;0)$; $C(\frac{1}{3}; 1)$ et $M(x_n; y_n)$.

Donc dans la base $B(\vec{AB}; \vec{AD})$ on a :

$$\begin{aligned} \vec{AM} \quad \begin{cases} x_n - 0 = x_n \\ y_n - 0 = y_n \end{cases} \\ \text{et } \vec{AC} \quad \begin{cases} \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \\ 1 - 0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \det(\vec{AM}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} x_n & \frac{1}{3} \\ y_n & 1 \end{vmatrix} = x_n - \frac{1}{3} y_n.$$

$$\text{|| Ainsi } M \in (AC) \text{ si } x_n - \frac{1}{3} y_n = 0$$

$$1^b) \text{ De la même manière, } M \in (BD) \Leftrightarrow \det(\vec{BM}; \vec{BD}) = 0$$

Or $B(1;0)$; $D(0;1)$ et $M(x_n; y_n)$

$$\vec{BM} \quad \begin{cases} x_n - 1 \\ y_n \end{cases} \quad \vec{BD} \quad \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \det(\vec{BM}; \vec{BD}) = \begin{vmatrix} x_n - 1 & -1 \\ y_n & 1 \end{vmatrix} = (x_n - 1) - (-1) \times y_n = (x_n - 1) + y_n$$

$$\text{|| Ainsi } M \in (BD) \text{ si } (x_n - 1) + y_n = 0, \text{ i.e. si } 1 - x_n = y_n$$

1^c) Finalement, les coordonnées du point M sont les solutions du système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_n - \frac{1}{3} y_n = 0 \\ 1 - x_n = y_n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_n - \frac{1}{3} (1 - x_n) = 0 \\ y_n = 1 - x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} x_n = 0 \\ y_n = 1 - x_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} x_n = \frac{1}{3} \\ y_n = 1 - x_n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{1}{4} \\ y_n = \frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{|| Donc } M\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right).$$

2°) I, J, N sont alignés si $\vec{IN}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires.

Or $I(\frac{1}{2}; 0)$ et $J(\frac{1}{6}; 1)$

Donc $\vec{IN} \begin{vmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\ \frac{3}{6} - 0 = \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ et $\vec{IJ} \begin{vmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\ 1 - 0 = 1 \end{vmatrix}$

$\det(\vec{IN}; \vec{IJ}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$

$\det(\vec{IN}; \vec{IJ}) = 0,$

|| donc I, J, N sont alignés.

3a) $\vec{NC} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \\ 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$; $\vec{NA} \begin{vmatrix} 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \\ 0 - \frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \times -\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Donc $\vec{NA} = -3 \vec{NC}$

|| au encore $\vec{NC} = -\frac{1}{3} \vec{NA}$

$\vec{NB} \begin{vmatrix} 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \\ 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}$; $\vec{NB} \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\ 0 - \frac{3}{6} = -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{6} \times -\frac{1}{2} = -\frac{5}{12}$

Donc $\vec{NB} = -3 \vec{NC}$

|| au encore $\vec{NB} = -\frac{1}{3} \vec{NA}$

3°) D'après la définition rappelée au début d'exercice (les homothéties par officieusement faites du programme de collège),

soit noté H l'homothétie de centre Π et de rapport $-\frac{1}{3}$,

|| on a: $A \xrightarrow{H} D$ et $B \xrightarrow{H} D$

|| Le centre de H est Π et son rapport est $-\frac{1}{3}$.